УДК 517.95

А.-В. С. Гупало

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Для параболической системы $u_t - Au_{xx} - Cu = f(x, t)$, $(x, t) \in \Omega_T = R^1 \times (0, T)$ с постоянными матрицами размера 2×2 (матрица A диагональная) рассмотрена обратная задача определения правой части системы по дополнительной информации в некоторой точке области Ω_T. Используя явный вид фундаментальной матрицы решений этой системы, решение обратной задачи получено в явной форме, удобной для реализации на ЭВМ.

Рассмотрим параболическую систему

$$\bar{u}_t(x, t) = \bar{A}\bar{u}_{xx}(x, t) + \bar{B}\bar{u}_x(x, t) + \bar{C}\bar{u}(x, t), \tag{1}$$

где $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ — постоянные матрицы размерности 2×2, $\bar{u}(x, t)$ — вектор-функция размерности 2×1.

Известно, что линейным преобразованием неизвестных функций

$$\bar{u}_i(x, t) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij} u_j(x, t)$$

систему (1) можно привести к виду

$$u_t(x, t) = Au_{xx}(x, t) + Bu_x(x, t) + Cu(x, t), \tag{2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}, \quad \alpha_i, \ \beta_{ij}, \ \gamma_{ij} - \text{const}, \quad i, \ j = 1, 2.$$

В [2] построена фундаментальная матрица решений системы (2) (см., например, [4, 5])

$$\mathscr{E}(x, t) = \begin{pmatrix} \mathscr{E}_{11}(x, t) & \mathscr{E}_{12}(x, t) \\ \mathscr{E}_{21}(x, t) & \mathscr{E}_{22}(x, t) \end{pmatrix},$$

ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1992. Вып. 4.

каждый член которой представлен довольно громоздкими рядами. Если рассмотреть частный случай, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2$, то фундаментальная матрица решений системы (2) выражается через элементарные функции и имеет следующий вид:

$$\mathscr{E}(x, t) = \frac{\theta(t)}{2r_0\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\alpha t} + \frac{\gamma_{11}+\gamma_{22}}{2} t\right] \times$$

$$\times \begin{pmatrix} (\gamma_{11}-\gamma_{22})\,\mathrm{sh}\,\frac{r_0 t}{2} + r_0\,\mathrm{ch}\,\frac{r_0 t}{2} & 2\gamma_{12}\,\mathrm{sh}\,\frac{r_0 t}{2} \\ 2\gamma_{21}\,\mathrm{sh}\,\frac{r_0 t}{2} & (\gamma_{22}-\gamma_{11})\,\mathrm{sh}\,\frac{r_0 t}{2} + r_0\,\mathrm{ch}\,\frac{r_0 t}{2} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $r_0 = \sqrt{|(\gamma_{11}-\gamma_{22})^2 + 4\gamma_{12}\gamma_2|} = \mathrm{const}$, $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

Для параболической системы

$$u_t(x, t) = Au_{xx}(x, t) + Cu(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T = R^1 \times (0, T) \quad (4)$$

рассмотрим обратную задачу, которая состоит в нахождении пары вектор-функций $u(x, t)$ и $f(x, t)$, удовлетворяющих системе (4), начальному

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in R^1 \quad (5)$$

и дополнительному условиям

$$u(x_0, t_1) = \psi. \quad (6)$$

Здесь (x_0, t_1) — фиксированная точка из Ω_T; $\varphi(x)$ — заданная непрерывная и ограниченная на R^1 функция; ψ — заданный постоянный вектор.

Из результатов [1] следует, что решение задачи (4) — (6) существует тогда и только тогда, когда

$$w = \psi - \int_{R^1} \mathscr{E}(x_0, t_1;\ y, 0)\,\varphi(y)\,dy \in R(P), \quad (7)$$

$R(P)$ — образ оператора

$$P = \int_0^{t_1}\int_{R^1} \mathscr{E}(x_0, t_1;\ y, \tau)\,\mathscr{E}^*(x_0, t_1;\ y, \tau)\,\exp[-(t_1-\tau)^{-2}]\,dy d\tau \quad (8)$$

$(P : R^2 \to R^2)$, $\mathscr{E}(x, t; y, \tau)$ — фундаментальная матрица решений системы (4). Причем

$$f(x, t) = \mathscr{E}^*(x_0, t_1, x, t)\exp[-(t_1-t)^{-2}]\,P^{-1}w, \quad (9)$$

$$u(x, t) = \int_{R^1} \mathscr{E}(x, t, y, 0)\,\varphi(y)\,dy + \int_0^t\int_{R^1} \mathscr{E}(x, t, y, \tau)\,\mathscr{E}^*(x, t, y, \tau)\times$$

$$\times \exp[-(t_1-\tau)^{-2}]\,P^{-1}w\,dy d\tau. \quad (10)$$

Так как для системы (4) в явном виде построена матрица $\mathscr{E}(x, t, y, \tau)$, то используя формулы (8) — (10), можем в явном виде записать операторы P, P^{-1} и решение обратной задачи (4) — (6).

Действительно, из (8), учитывая (3), получаем

$$P = \int_0^{t_1}\int_{R^1} \frac{1}{4r_0^2\pi\alpha(t_1-\tau)} \exp\left[-\frac{(x_0-y)^2}{2\alpha(t_1-\tau)} + (\gamma_{11}+\gamma_{22})(t_1-\tau)\right] \times$$

$$\times \begin{pmatrix} G_{11}(t_1-\tau) & G_{12}(t_1-\tau) \\ G_{21}(t_1-\tau) & G_{22}(t_1-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{11}(t_1-\tau) & G_{21}(t_1-\tau) \\ G_{12}(t_1-\tau) & G_{22}(t_1-\tau) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \exp[-(t_1-\tau)^{-2}]\,dy d\tau = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Из (11) имеем

$$P_{11} = \int_0^{t_1}\int_{R^1} B(x_0, t_1, y, \tau)\,(G_{11}^2(t_1-\tau) + G_{12}^2(t_1-\tau))\exp[-(t_1-\tau)^{-2}]\,dy d\tau,$$

$$P_{12}=\int_0^{t_1}\int_{R^1} B(x_0,t_1,y,\tau)(G_{11}(t_1-\tau)G_{21}(t_1-\tau)+$$
$$+G_{12}(t_1-\tau)G_{22}(t_1-\tau))\exp[-(t_1-\tau)^{-2}]\,dyd\tau, \tag{12}$$
$$P_{21}=\int_0^{t_1}\int_{R^1} B(x_0,t_1,y,\tau)(G_{21}(t_1-\tau)G_{11}(t_1-\tau)+$$
$$+G_{22}(t_1-\tau)G_{12}(t_1-\tau))\exp[-(t_1-\tau)^{-2}]\,dyd\tau,$$
$$P_{22}=\int_0^{t_1}\int_{R^1} B(x_0,t_1,y,\tau)(G_{21}^2(t_1-\tau)+G_{22}^2(t_1-\tau))\exp[-(t_1-\tau)^{-2}]\,dyd\tau,$$

где

$$B(x_0,t_1,y,\tau)=\frac{1}{4r_0^2\pi\alpha(t_1-\tau)}\exp\left[-\frac{(x_0-y)^2}{2\alpha(t_1-\tau)}+(\gamma_{11}+\gamma_{22})(t_1-\tau)\right],$$
$$G_{11}(t_1-\tau)=(\gamma_{11}-\gamma_{22})\,\mathrm{sh}\,\frac{r_0(t_1-\tau)}{2}+r_0\,\mathrm{ch}\,\frac{r_0(t_1-\tau)}{2},$$
$$G_{12}(t_1-\tau)=2\gamma_{12}\,\mathrm{sh}\,\frac{r_0(t_1-\tau)}{2}, \tag{13}$$
$$G_{21}(t_1-\tau)=2\gamma_{21}\,\mathrm{sh}\,\frac{r_0(t_1-\tau)}{2},$$
$$G_{22}(t_1-\tau)=(\gamma_{22}-\gamma_{11})\,\mathrm{sh}\,\frac{r_0(t_1-\tau)}{2}+r_0\,\mathrm{ch}\,\frac{r_0(t_1-\tau)}{2}.$$

Далее

$$\det P=P_{11}P_{22}-P_{12}P_{21}=\int_0^{t}\int_{R^1} B(x_0,t_1,y,\tau)[G_{11}(t_1-\tau)G_{22}(t_1-\tau)-$$
$$-G_{12}(t_1-\tau)G_{21}(t_1-\tau)]^2\exp[-(t_1-\tau)^{-2}]\,dyd\tau \tag{14}$$

имеем $\det P\neq 0$, так как $B(x_0,t_1,y,\tau)\neq 0$, $G_{11}(t_1-\tau)G_{22}(t_1-\tau)-G_{12}(t_1-\tau)G_{21}(t_1-\tau)\neq 0$ для $0<\tau<t_1$, $y\in R^1$.

Следовательно,

$$P^{-1}=\frac{1}{\det P}\begin{pmatrix}P_{22} & -P_{12}\\ -P_{21} & P_{11}\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Из (9), учитывая (3), (7), (15), после ряда преобразований получаем

$$f(x,t)=\frac{1}{2r_0\sqrt{\pi\alpha(t_1-t)}}\exp\left[-\frac{(x_0-x)^2}{4\alpha(t_1-t)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_{11}+\gamma_{22}}{2}(t_1-t)-(t_1-t)^{-2}\right]\times$$
$$\times\frac{1}{\det P}\begin{pmatrix}[G_{11}(t_1-t)P_{22}-G_{21}(t_1-t)P_{21}]\,\omega_1+\\ [G_{12}(t_1-t)P_{22}-G_{22}(t_1-t)P_{21}]\,\omega_1+\\ \qquad+[-G_{11}(t_1-t)P_{12}+G_{21}(t_1-t)P_{11}]\,\omega_2\\ \qquad+[-G_{12}(t_1-t)P_{12}+G_{22}(t_1-t)P_{11}]\,\omega_2\end{pmatrix}, \tag{16}$$

где

$$\omega_1=\psi_1-\int_{R^1}\frac{1}{2r_0\sqrt{\pi\alpha t_1}}\exp\left[-\frac{(x_0-y)^2}{4\alpha t_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_{11}+\gamma_{22}}{2}t_1\right](G_{11}(t_1)\varphi_1(y)+G_{12}(t_1)\varphi_2(y))\,dy, \tag{17}$$
$$\omega_2=\psi_2-\int_{R^1}\frac{1}{2r_0\sqrt{\pi\alpha t_1}}\exp\left[-\frac{(x_0-y)^2}{4\alpha t_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_{11}+\gamma_{22}}{2}t_1\right](G_{21}(t_1)\varphi_1(y)+G_{22}(t_1)\varphi_2(y))\,dy.$$

Из (10) получаем

$$u(x, t) = \int_{R_1} \frac{1}{2r_0\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\alpha t} + \frac{\gamma_{11}+\gamma_{22}}{2}t\right] \times$$

$$\times \begin{pmatrix} G_{11}(t)\,\varphi_1(y) + G_{12}(t)\,\varphi_2(y) \\ G_{21}(t)\,\varphi_1(y) + G_{22}(t)\,\varphi_2(y) \end{pmatrix} dy +$$

$$+ \int_0^t \int_{R^1} \frac{1}{4r_0^2\pi\alpha(t-\tau)\det P} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2\alpha(t-\tau)} + (\gamma_{11}+\gamma_{22})(t-\tau) - (t_1-\tau)^2\right] \times$$

$$\times \begin{pmatrix} [G_{11}^2(t-\tau) + G_{12}^2(t-\tau)]\,[P_{22}w_1 - P_{12}w_2] + \\ [G_{21}(t-\tau)\,G_{11}(t-\tau) + G_{22}(t-\tau)\,G_{12}(t-\tau)]\,[P_{22}w_1 - P_{12}w_2] + \\ + [G_{11}(t-\tau)\,G_{21}(t-\tau) + G_{12}(t-\tau)\,G_{22}(t-\tau)]\,[-P_{21}w_1 + P_{11}w_2] \\ + [G_{21}^2(t-\tau) + G_{22}^2(t-\tau)]\,[-P_{21}w_1 + P_{11}w_2] \end{pmatrix} dy\,d\tau,$$

где w_1, w_2 — определены по формулам (17), $G_{ij}(t-\tau)$, $i, j = 1, 2$ — по (13), P_{ij}, $i, j = 1, 2$ — по (12).

1. *Волков Н. П.* Существование решений некоторых обратных задач определения правой части параболической системы // Функциональные методы в задачах математической физики.— М. : Энергоатомиздат, 1985.— С. 8—11.
2. *Лопушанская Г. П.* О решении некоторых классов обратных краевых задач в пространстве распределений.— Львов. Львов. ун-т, 1989.— 12 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 17.01.90. № 48.— Ук90.
3. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.— М. : Мир, 1968.— 427 с.
4. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы.— М. : Наука, 1964.— 443 с.

Львов. гос. ун-т
им. Ив. Франко

Получено 15.10.90